УДК 330.131.7:519.86

В. П. СЕВЕРИН, канд. техн. наук, ***М.С. ШЕРГІНА***

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ДВУВИДОВОГО ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

Поставлено задачу оптимізації структури портфеля цінних паперів. Обрано модель задачі двукритеріальної оптимізації портфеля інвестора. Розроблено методи оптимізації для рішення данної задачі. Отримано аналітичне рішення даної задачі при оптимізації двувидового портфеля цінних паперів за допомогою чисельних методів.

Основной задачей в процессе оптимального формирования портфеля ценных бумаг является задача распределения определенной суммы денег по различным альтернативным вложениям с целью максимизации доходности. Любое вложение капитала связано с постоянной опасностью проигрыша, а значит, в оптимизационных задачах по выбору портфеля ценных бумаг необходимо учитывать риск. В принципе, для создания портфеля ценных бумаг достаточно инвестировать деньги в какой-либо один вид финансовых активов. Но такой однородный по содержанию портфель будет нести высокую норму риска. Гораздо более распространенный формой является так называемый диверсифицированный портфель. Использование диверсифицированного портфеля устраняет разброс в нормах доходности различных финансовых активов и снижает риски. В общем случае задача оптимизации портфеля состоит в выборе такого распределения средств между активами, при котором происходит максимизация прибыли при заданных ограничениях на уровень риска.

Статья посвящена проблемам, стоящим перед инвестором, формирующим портфель ценных бумаг. Дана общая математическая постановка задачи оптимизации портфеля, составляемого только из рисковых ценных бумаг, а также найдено аналитическое решение поставленной задачи.

Постановка задачи оптимизации структуры портфеля

Портфель ценных бумаг инвестора – совокупность ценных бумаг, принадлежащих данному инвестору. Пусть инвестор формирует свой портфель на множестве из N ($N > 1$) различных ценных бумаг. Капитал инвестора распределяется между различными активами в некоторых пропорциях x_j, где $j = \overline{1, n}$, удовлетворяющих условию:

$$\sum_{i=1}^{n} x_j = 1.$$

Совокупность величин $\{ x_j \}$($j = \overline{1, n}$) определяет структуру портфеля ценных бумаг. Имеет место следующая интерпретация $\{ x_j \}$:

- $x_j > 0$ доля x_j капитала инвестора вложена в ценную бумагу j;

- $x_j = 0$ ценная бумага j отсутствует в портфеле инвестора;
- $x_j < 0$ относительно ценной бумаги j совершена операция “короткая продажа” (short sale);

Доходность портфеля:

$$R_p = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j ,$$

где R_j —доходность ценной бумаги j.

Ожидаемая доходность портфеля:

$$m_p = E(R_p) = \sum_{j=1}^{n} x_j E(R_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j m_i .$$

Для записи дисперсии воспользуемся определением ковариации двух случайных величин R_i и R_j:

$$V_{ij} = E((R_i - m_i)(R_j - m_j)) .$$

Дисперсия доходности портфеля:

$$V_p^2 = E\left((R_p - m_p)^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j E((R_i - m_i)(R_j - m_j)) = \sum_{i}\sum_{j} x_i x_j V_{ij} .$$

Модель двухкритериальной оптимизации портфеля инвестора

Математическая формулировка данной задачи имеет вид:

$$m_p = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j \to \max , \tag{1}$$

$$V_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} \to \min , \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 . \tag{3}$$

Точка ($x_1,\ldots,x_n$) принадлежит множеству таких допустимых точек задачи, которые не могут быть улучшены сразу по двум критериям — m и V . В теории многокритериальной оптимизации такие решения называются *Парето-оптимальными*.

Чтобы пояснить смысл этого понятия, представим контур, соединяющий точки с координатами m , V , вычисленными для допустимых точек некоторого «условного» множества *x* (рис.1).

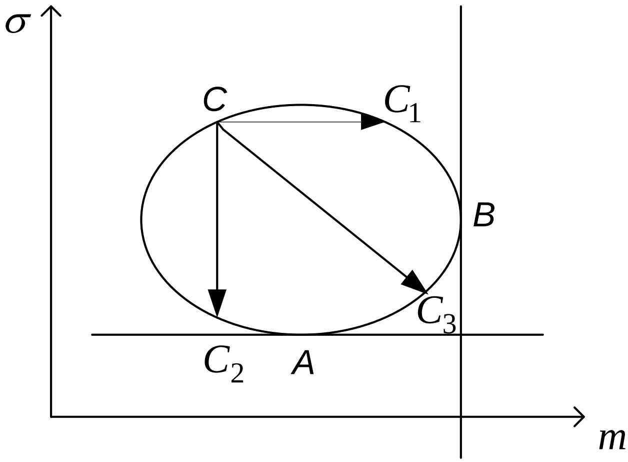

Рис.1 Восходящая дуга *AB* соответствует Парето-оптимальному множеству решений

Множеству эффективных точек соответствует восходящая дуга *AB*: для любой посторонней точки, например *C*, можно построить улучшающую ее точку (*) в том смысле, что либо $m^* > m, V^* = V$ (точка C_1), либо $m^* = m, V^* < V$ (точка C_2), либо $m^* > m, V^* < V$ (точка C_3), а для «своих» точек этого сделать нельзя.

Аналитическое решение задачи двувидового портфеля

Представим решение задачи об оптимизации портфеля ценных бумаг в аналитическом виде.

Рассмотрим случай для двух параметров x_1, x_2 (ценных бумаг), т.е. $n = 2$.

Допустимая область *D*:

$D' = \{x \mid 0 \le x_1, x_2 \le 1\}$,

$D = \{x \mid x \in D', h(x) = 0\}$.

Ограничение области поиска оптимального решения:

$h(x) = x_1 + x_2 - 1$.

Функция дохода $f_1(x)$:

$f_1(x) = m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 \to \max$.

Функция риска $f_2(x)$:

$f_2(x) = V_1 \cdot x_1^2 + V_2 \cdot x_2^2 + V_3 \cdot x_1 \cdot x_2 \to \min$.

Вид функций дохода и риска с указанием значений переменных:

$m_1 = 3, \quad m_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad f_1(x) = 3x_1 + x_2$.

$V_1 = 2, \quad V_2 = 1, \quad V_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad f_2(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2$.

Требуется найти: *D*, *G*, *x**, *f**.

Определение границ достижимой области G.

$f_1 \in [0; m+1] \Rightarrow f_1 \in [0:4]$.

$f_2 \in [0; V+2] \Rightarrow f_2 \in [0:4]$.

Для того чтобы на основании допустимой области получить достижимую область, необходимо отобразить в пространство критериев каждый участок области пространства параметров.

1) Отображение первой границы:

$x_1 \in [0;1], x_2 = 0$.

$$f_1 = 3x_1 \Rightarrow f_1 \in [0;3], \quad f_2 = 2x_1^2,\ x_1 = \frac{f_1}{3},\ f_2 = 2\left(\frac{f_1}{3}\right)^2.$$

2) Отображение второй границы:

$x_1 = 0,\ x_2 \in [0;1]$.

$f_1 = x_2 \in [0;1],\ f_2 = x_2^2,\ f_2 = f_1^2$.

3) Отображение третьей границы:

$x_1 \in [0;1], x_2 = 1$.

$f_1 = 3x_1 + 1 \in [1;4],\ f_2 = 2x_1^2 + 1 + x_1$,

$$x_1 = \frac{f_1 - 1}{3}, \quad f_2 = 2\left(\frac{f_1 - 1}{3}\right)^2 + 1 + \frac{f_1 - 1}{3} = \frac{2}{9}\left(f_1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8},$$

$$f_1 = 4 \Rightarrow f_2 = \frac{2}{9}\left(4 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} = 4.$$

4) Отображение четвертой границы:

$x_1 = 1,\ x_2 \in [0;1]$.

$f_1 = 3 + x_2 \in [3;4], \quad f_2 = 2 + x_2^2 + x_2$,

$$x_2 = f_1 - 3, \quad f_2 = 2 + (f_1 - 3)^2 + f_1 - 3 = \left(f_1 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4},$$

$$f_1 = 3 \Rightarrow f_2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 2,$$

$$f_1 = 4 \Rightarrow f_2 = \left(4 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 4.$$

5) Отображение линии ограничения:

$x_1 + x_2 = 1, \quad x_2 = 1 - x_1, \quad x_1 \in [0;1]$.

$f_1 = 3x_1 + 1 - x_1 = 2x_1 + 1 \in [1;3]$,

$f_2 = 2x_1^2 + (1 - x_1)^2 + x_1 \cdot (1 - x_1) = 2x_1^2 - x_1 + 1$,

$$x_1 \frac{f_1 - 1}{2}, \quad f_2 = 2\left(\frac{f_1 - 1}{2}\right)^2 - \frac{f_1 - 1}{2} + 1 = \frac{1}{2}\left(f_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{8},$$

$$f_1 = 1 \Rightarrow f_2 = \frac{1}{8} + \frac{7}{8} = 1,$$

$$f_1 = 3 \Rightarrow f_2 = \frac{9}{8} + \frac{7}{8} = 2.$$

6) Нахождение оптимальной точки на основании использования подходов многокритериальной оптимизации.

Для реализации данной задачи наиболее эффективным является использование условной оптимизации, при которой на первые критерии накладываются ограничения (f_1), а последний критерий минимизируется (f_2).

Условная оптимизация:

$$f_1 \geq 2, \quad f_2 \to \min \Rightarrow f_1^* = 2 \Rightarrow f_2^* = 1,$$

$$f_1^* = 3x_1^* + x_2^* = 2x_1^* + \left(x_1^* + x_2^*\right) = 2x_1^* + 1 = 2.$$

Таким образом, найдена оптимальная точка:

$$x^* = (0.5; 0.5), \quad f^* = (2; 1).$$

Решение задачи в допустимой и достижимой области представлено на рис.2, рис.3.

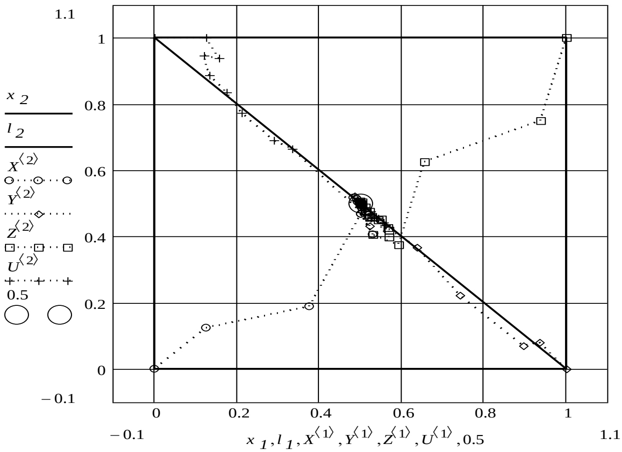

Рис.2 Допустимая область с траекториями поиска

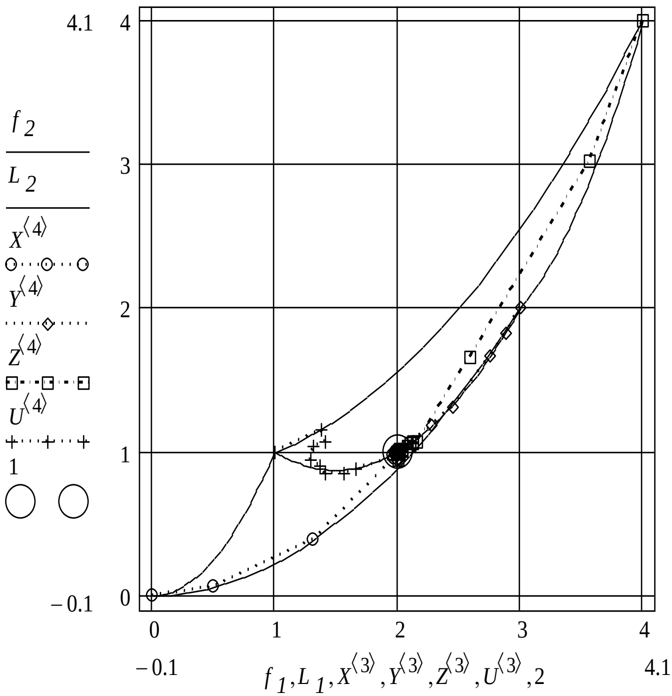

Рис.3 Достижимая область с траекториями поиска

Проведенная работа позволяет сделать следующие выводы. Поставлена задача оптимизации структуры портфеля ценных бумаг. Выбрана модель задачи двухкритериальной оптимизации портфеля инвестора. Разработаны методы оптимизации для решения поставленной задачи. Получено аналитическое решение данной задачи при оптимизации двувидового портфеля ценных бумаг.

Список літератури: 1. *Капитоненко В.В.* Финансовая математика и ее приложения: Учебно-практическое пособие для вузов. — М.: «Издательство ПРИОР», 1998. **2.** *Фадеев А.* Формирование портфеля ценных бумаг//Рынок ценных бумаг. — 1995.— №18 **3.** Математические модели формирования портфеля ценных бумаг. — http:// www.finbridge.ru/ mat/ mat_model.html

Поступила в редколлегию 05.04.06